

§18 Differenzierbare Funktionen in n Veränderlichen

Wie erklärt man Differenzierbarkeit
von Funktionen $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$?

1^{te} Möglichkeit: Rückgriff auf Ana I

Def 18.1: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^M, \quad \varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^M),$$

eine Funktion.

i) Sei $a \in U$ und $i \in \{1, \dots, n\}$.

Falls

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\varphi(a + h e_i) - \varphi(a)] =$$

$\frac{d}{dt} \big|_0 \nexists (a + t e_i)$ existiert,

$$e_i = (0 \dots 0 \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{te Stelle}}}{1} 0 \dots 0) \in \mathbb{R}^n,$$

so heißt dieser Vektor $\in \mathbb{R}^M$ die
*i*te partielle Ableitung von f in a ,
 genauer: die partielle Ableitung von
 f in die *i*te Koordinatenrichtung
 an der Stelle a .

Schreibweisen:

$$\partial_i f(a), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}^M$$

ii) f heißt auf U stetig
 partiell diff'bar $\iff$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existiert für alle $i = 1, \dots, n$

und alle $a \in U$; außerdem sind alle

Funktionen $U \ni a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}$

stetig auf U .

Bem: 1) Seien $i \in \{1, \dots, n\}$ und

$a = (a_1, \dots, a_n)$ fixiert. Man bildet

die i te partielle Funktion

$$f_i: t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

Dann gilt: $f'_i(\underline{a_i})$ existiert $\iff$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \text{ existiert.}$$

In diesem Fall sind die Ableitungen gleich.

Deshalb gelten für partiell Ableitungen die Rechenregeln, die man für $\frac{d}{dt}$ kennt.

2) Sei $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x, y) := \sin(x^2 + y^2)$

Dann gilt: $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) =$ (Kettenregel)

$$\cos(x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = \cos(x^2 + y^2) 2x$$

3) Sei $n \geq 2$ und $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) := |x| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

φ ist auf $\mathbb{R}^n - \{0\}$ partiell diff'bar

mit

$$\partial_i \varphi(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^n x_k^2$$

$$= \frac{x_i}{|x|}$$



Die Existenz der partiellen Ableitungen hat keine weitreichenden Konsequenzen:

$$(*) \quad \left| \begin{array}{l} \partial_i f(a) \text{ existiere für } i=1, \dots, n \\ f \text{ stetig in } a \end{array} \right. \not\Rightarrow$$

M.a.W. : Partielle Diff'barkeit von f ist ein zu schwacher Differenzierbarkeitsbegriff, denn man möchte "wie immer"

$$\text{Diff'barkeit} \Rightarrow \text{Stetigkeit}$$

wissen.

-256-

Bspl. zu (*) : (vgl. Umfeld von Satz 16.12)

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y = 0 \\ \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir haben gezeigt: f unstetig in $(0,0)$

Es gilt weiter:

a) Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$
existieren für alle $(x, y) \neq (0,0)$,

z.B. :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \dots$$

$$\dots = 2y \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dots = 2x \frac{-y^2 + x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

b) Auch $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ -257-

existieren, z.B. $h \neq 0$

$$\frac{1}{h} (f(h,0) - f(0,0)) =$$

$$\frac{1}{h} \left[\frac{2h \cdot 0}{h^2 + 0^2} - 0 \right] = 0 \implies$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \text{ und genauso } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

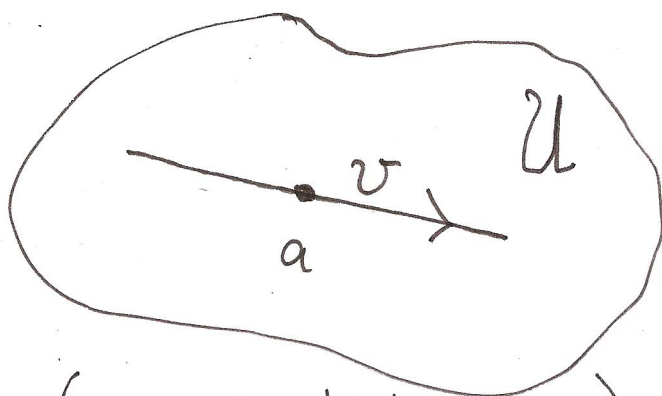
Also:

f auf $\mathbb{R}^2$ nach x und y
partiell diff'bar, aber
unstetig in $(0,0)$

c) Überlege: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
sind unstetig in $(0,0)$

Fazit: " partielle Diff'barkeit ist
" wenig leistungsfähig ~~in Aktion~~

2^{te} Möglichkeit: man lasse beim
Ableiten beliebige Richtungen zu und
nicht nur die Koordinatenrichtungen
 $e_1, \dots, e_n$



betrachte also $(t \in \mathbb{R}, |t| \ll 1)$
 $t \mapsto f(a + tv)$

mit beliebiger Richtung $v \in \mathbb{R}^n$

Def 18.2 : Richtungsableitungen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^M$ und
 $a \in U$ sowie $v \in \mathbb{R}^n$. Existiert
dann

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a+hv) - f(a)) =$$

$$\frac{d}{dt} f(a+tv),$$

so heißt dieser Vektor $\in \mathbb{R}^M$ die
Richtungsableitung von f in a
nach v .

Schreibweisen: $\partial_v f(a), D_v f(a)$

Bem: 1.) offenbar:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_{e_i} f(a)$$

$$2.) \left\{ \begin{array}{l} \partial_v f(a) \text{ existiert} \implies \\ \partial_{\lambda v} f(a) \text{ existiert für alle } \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{mit } \partial_{\lambda v} f(a) = \lambda \partial_v f(a) \end{array} \right.$$

Beweis: Sei $\lambda \neq 0$ ($\partial_0 f = 0!$)

Dann ist (für $0 \neq h \in \mathbb{R}, |h| \ll 1$)

$$\frac{1}{h} (f(a + h \lambda v) - f(a)) =$$

$$\lambda \underbrace{\frac{1}{\lambda h} [f(a + h \lambda v) - f(a)]}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} \partial_v f(a)} \rightarrow \lambda \partial_v f(a)$$

□

3.) Kompliziertere Bspl zeigen:

$\partial_v f(a)$ existiert für alle $v \in \mathbb{R}^n$
 $\not\Rightarrow f$ stetig in a (vgl. Übung)

Beispiele für Richtungsableitungen:

① $\partial_{(1,1)} e^{xy} = ?$

berechne $\frac{d}{dt} \Big|_0 e^{(x+t)(y+t)}$ =

$\frac{d}{dt} \Big|_0 \left\{ e^{xy} \cdot e^{t(x+y)} \cdot e^{t^2} \right\} =$

$(x+y) e^{xy}$

Beobachtung: $\partial_{(1,1)} e^{xy} = \partial_{(1,0)} e^{xy} + \partial_{(0,1)} e^{xy}$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad \text{auf } \mathbb{R}^n: \quad \partial_v |x|^2 &= \\
 \frac{d}{dt} \big|_{t=0} |x+tv|^2 &= \frac{d}{dt} \big|_{t=0} \sum_{i=1}^n (x_i + tv_i)^2 \\
 &= 2 \sum_{i=1}^n x_i v_i = 2 X \cdot v
 \end{aligned}$$

Beobachtung: hier ist $v \mapsto \partial_v f(x)$,
 $x \in \mathbb{R}^n$ fest, sogar linear in v .

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} \quad \partial_v \frac{x}{|x|} &= \frac{d}{dt} \big|_{t=0} \frac{x+tv}{|x+tv|} = \\
 &= -|x|^{-3} (x \cdot v) x + |x|^{-1} v
 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $v \in \mathbb{R}^n$;

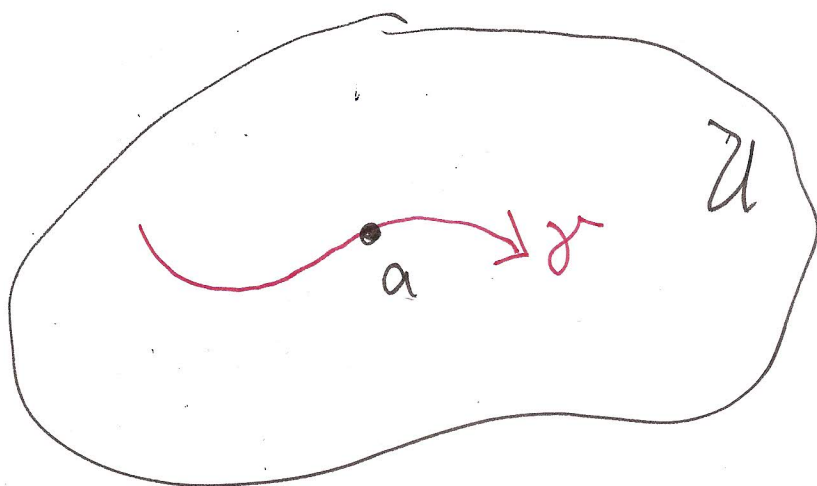
auch hier ist $v \mapsto \partial_v \frac{x}{|x|}$ linear;

speziell: $\partial_x \frac{x}{|x|} = 0$ (wieso ist das offensichtlich?)

Wie bemerkt ist der Begriff der Richtungsableitung auch noch zu schwach für Stetigkeit.

3^{te} Möglichkeit : „Differenzierbarkeit
längs Kurven“

man fordert,
dass



$\frac{d}{dt} f(\gamma(t))$ existiert für jede C^1

Kurve γ mit Spur $\gamma \subset U$ und $\gamma(0) = a$.
(bisher: $\gamma(t) = a + tv$)

Dann ist f tatsächlich stetig in a .

Allerdings ist dieses Kriterium für

Differenzierbarkeit sehr unpraktisch. ▽

Wir kommen später darauf zurück.

Zunächst noch **höhere partiell Ableitungen**:

Def 18.3 : Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^M.$$

a) f sei auf U nach x_i partiell diff'bar, d.h. $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \rightarrow \mathbb{R}^M$ existiert.

Existiert dann für ein $a \in U$ und ein $j \in \{1, \dots, n\}$ die partiell Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a),$$

so schreibt man dafür kürzer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad (a)$$

-265-

(Reihenfolge: erst $\frac{\partial}{\partial x_i}$, dann $\frac{\partial}{\partial x_j}$!)

b) f heißt 2 mal partiell diff'bar
auf U : $\Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (a)$ existiert

für alle $a \in U$, $i, j = 1, \dots, n$.

(2 mal stetig partiell diff'bar : $\Leftrightarrow$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ stetig auf $U \quad \forall i, j$)

c) höhere partiell Ableitungen:

$$\begin{cases} \alpha \in \mathbb{N}_0^n, & \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \\ |\alpha| := \sum_{k=1}^n \alpha_k \end{cases}$$

$$\partial^\alpha f := D^\alpha f \quad :=$$

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad :=$$

$$\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \left(\dots \left(\frac{\partial^{\alpha_{n-1}}}{\partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}} \left(\frac{\partial^{\alpha_n} f}{\partial x_n^{\alpha_n}} \right) \right) \dots \right)$$

mit

$$\frac{\partial^k}{\partial x_i^k} f := \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_i^{k-1}} f \right)$$

($k \in \mathbb{N}$) (rekursiv),

Falls alle partiellen Ableitungen existieren.

Frage: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} ?$

leider i.a. nein!

Beispiel :

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} 0, & (x,y) = (0,0) \\ xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

rechne nach (!):

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (0,0) = -1,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (0,0) = +1$$



Verlangt man aber Stetigkeit der auftretenden partiellen Ableitungen, so darf man die Reihenfolge tauschen, genauer:

Satz 18.1 (Lemma von Schwarz)

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ ^{offen} und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^M$.

Existieren $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$

auf U und ist

$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$ stetig in $(a,b) \in U$,

so existiert auch $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (a,b)$,

und es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (a,b) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (a,b).$$

Korollar : Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^M$ k -mal stetig ^{partiell} diff'bar,

d.h. für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \leq k$,

existieren die partiellen Ableitungen

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

auf U und sind stetig. Dann kommt es bei der Bildung von $\partial^\alpha f$ nicht auf die Reihenfolge an.

Beweis des Satzes: Sei o.E.

$M = 1$ und $(a, b) = (0, 0)$. Man setzt

$$F(t) := \frac{1}{t} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right]$$

für $t \neq 0$. Zu zeigen ist:

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(t) \text{ existiert } (\Leftrightarrow$$

$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (0, 0) \text{ existiert}) \text{ mit Wert }$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (0,0)$$

Für $u \neq 0 \neq v$ sei

$$G(u,v) := \frac{1}{uv} \left[f(u,v) - f(0,v) - (f(u,0) - f(0,0)) \right]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 0} G(u,v) &= \frac{1}{v} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,v) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right] \\ &= F(v) \end{aligned}$$

Nun zeige: Für (u,v) nahe $(0,0)$

hat $G(u,v)$ die Form

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (\tilde{u}, \tilde{v})$$

mit $(\tilde{u}, \tilde{v})$ ebenfalls nahe $(0,0)$.

Da $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$ stetig in $(0,0)$

sein soll, folgt:

$$|G(u,v) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(0,0)| \leq \varepsilon$$

$$\forall |(u,v)| < \delta, u \neq 0 \neq v$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 0} |F(u) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(0,0)| &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

$$\forall 0 < |v| < \delta$$

$$\Rightarrow \lim_{v \rightarrow 0} F(u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(0,0).$$



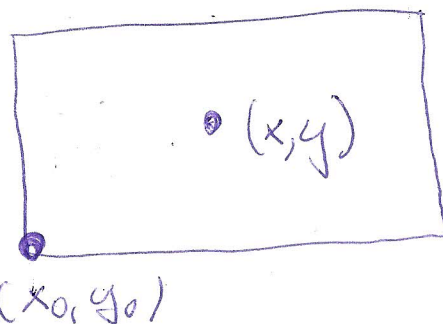
Nun zum "richtigen" Ableitungsbeginn! ↗

Übung 22

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Kurzer Beweis des Satzes,} \\ \text{falls } \partial_i \partial_j f \text{ stetig, } i, j = 1, 2 : \end{array} \right.$

betrachte ein Rechteck R und

$$(x, y), (x_0, y_0) \in R$$



Hauptsatz $\implies$

$$f(x, y) = f(x, y_0) + \int_{y_0}^y (\partial_2 f)(x, t) dt$$

Ableiten nach dem Parameter $x \implies$

$$\partial_1 f(x, y) = \partial_1 f(x, y_0) + \int_{y_0}^y \partial_1 (\partial_2 f)(x, t) dt$$

nun bilde $\frac{\partial}{\partial y}$ und benutze rechts wieder

den Hauptsatz :

$$\partial_2 (\partial_1 f)(x, y) = 0 + \partial_1 (\partial_2 f)(x, y)$$